АДМИНИСТРАЦИЯ ГОРОДА НИЖНЕГО НОВГОРОДА

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ

**МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«Школа № 22
с углубленным изучением отдельных предметов»**

ПРИНЯТА:
Педагогическим советом
МАОУ школы №22
(протокол №1 от 29.08.2025)

УТВЕРЖДЕНА:
Приказом МАОУ школы №22
от 01.09.2025 № 1

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Индивидуально-групповых занятий

для обучающихся 8 классов

Математика для каждого

г.Нижний Новгород 2025

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1. Нормативно-правовая база:

- Федеральный Закон «Об образовании в Российской Федерации» №273-ФЗ от 29.12.2012г. (гл.2 ст.10 п.1, ст.11 ч.3, гл.4 ст.34 ч.4);

- приказ Минобрнауки России от 17 декабря 2010г. № 1897 «Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»;

- письмо Минобрнауки России от 12.05.2011г. №03-296 «Об организации внеурочной деятельности при введении федерального государственного образовательного стандарта общего образования»;

- постановлением Главного санитарного врача РФ от 29.12.2010г. №189 (зарегистрирован в Минюсте России 3 марта 2011 г., регистрационный номер 1999г); «Об утверждении СанПиН 2.4.2.2821-10 «Санитарно- эпидемиологические требования к условиям организации обучения в общеобразовательных учреждениях» (далее СанПиН 2.4.2.2821-10);

- Федеральные требования к образовательным учреждениям в части минимальной оснащенности учебного процесса и оборудования учебных помещений (утверждены приказом Минобрнауки России от 4 октября 2010 г. № 986, зарегистрированы в Минюсте России 3 февраля 2011 г., регистрационный номер 19682);

- Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы «Санитарно- эпидемиологические требования к учреждениям дополнительного образования СанПиН 2.4.4.1251-03» (утверждены постановлением Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 3 апреля 2003 г. № 27,зарегистрированы в Минюсте России 27 мая 2003 г., регистрационный номер 4594;

- Федеральные требования к образовательным учреждениям в части охраны здоровья обучающихся, воспитанников (утверждены приказом Минобрнауки Россииот 28 декабря 2010 г. № 2106, зарегистрированы в Минюсте России 2 февраля 2011 г., регистрационный номер 19676);

- Концепция духовно-нравственного воспитания российских школьников;

- Программа воспитания и социализации обучающихся.

2. Назначение программы:

-по направлению – общеинтеллектуальная (позволяет формировать потребности к познанию, обеспечивать общее интеллектуальное развитие, формирует умения и навыки проектной деятельности обучающихся);

-по функциональному предназначению - прикладная;

-по времени реализации – учебный год.

Предлагаемый курс предназначен для развития математических способностей учащихся, для формирования элементов логической и алгоритмической грамотности, коммуникативных умений школьников с применением коллективных форм организации занятий и использованием современных средств обучения. Создание на занятиях ситуаций активного поиска, предоставление возможности сделать собственное «открытие», знакомство с оригинальными путями рассуждений, овладение элементарными навыками исследовательской деятельности позволят обучающимся реализовать свои возможности, приобрести уверенность в своих силах Содержание данного курса строится на основе деятельностного подхода: с помощью проведения различных опытов ученики отвечают на вопросы, приобретают умения описывать, сравнивать, анализировать полученные результаты и делать выводы.

3. Актуальность программы

Стремительно развивающиеся изменения в обществе и экономике требуют сегодня от человека умения быстро адаптироваться, находить оптимальные решения сложных вопросов, проявлять гибкость и творчество, не теряясь в ситуации неопределенности. Активные методы и формы обучения во внеклассной работе помогут подготовить учеников, обладающих необходимым набором знаний, умений позволят им уверенно чувствовать себя в жизни.

В наше время творческий процесс заслуживает самого пристального внимания, поскольку общество нуждается в массовом творчестве, массовом совершенствовании уже известного, в отказе от устойчивых и привычных, но пришедших в противоречие с имеющимися потребностями и возможностями форм. Ускоренный прогресс во всех областях знаний и деятельности требует появления большего числа исследователей-творцов. Вот почему так важно, чтобы дети учились не только запоминать и усваивать определенный объем знаний, но и овладевая приемами исследовательской работы, научились самостоятельно добывать знания, ставить перед собой цели, то есть мыслить, тем самым добиваться результатов.

Увеличение умственной нагрузки на уроках математики заставляет задуматься над тем, как сохранить у школьников интерес к изучаемому материалу, поддержать их активность на протяжении всего занятия. В связи с этим ведутся поиски новых эффективных методов обучения и таких методических приемов, которые активизировали бы мышление обучающихся, стимулировали бы их самостоятельность в приобретении знаний.

Практическая значимость: Умение решать задачи является одним из показателей уровня математического развития, глубины освоения учебного материала. Любой экзамен по математике, любая проверка знаний строится на решении задач. И тут обнаруживается, что многие учащиеся не могут продемонстрировать в этой области достаточного умения. Особо остро встает эта проблема, когда встречается задача незнакомого или малознакомого типа, нестандартная задача. Причины – в неумении решать задачи, в не владении приемами и методами решения, в недостаточной изученности задачи и т. д. Надо научиться анализировать задачу, задавать по ходу анализа и решения правильные вопросы, понимать, в чем смысл решения задач разных типов, когда нужно проводить проверку, исследовать результаты решения и т.д.

Сегодня актуален вопрос подготовки со школьной скамьи научно- технических кадров для общества. А, значит, высоко мотивированные дети уже сейчас нуждаются в расширенных возможностях самореализации. Такая возможность заключается как в публичной демонстрации результатов исследовательской деятельности, так и в активных участиях в математических олимпиадах, праздниках и конкурсах различного уровня: от школьного до международного. Потому возникает необходимость в метапредметной проектной деятельности.

1. ***Рабочая программа ориентирована*** на учащихся 8 класса
2. ***Рабочая программа рассчитана:*** на год (1 час в неделю), 34 часа
3. Продолжительность одного занятия: 40 мин
4. ***Цели:***

Создание условий для развития и воспитания личности обучающихся, обеспечивающих формирование творческого мышления, приобретение знаний и умений учащимися посредством проектирования исследовательской деятельности.

5. Задачи программы:

- пробуждение и развитие устойчивого интереса учащихся к математике и ее приложениям;
- раскрытие творческих способностей ребенка;
- развитие у учащихся умения самостоятельно и творчески работать с учебной и научно-популярной литературой;
- воспитание твердости в пути достижения цели (решения той или иной задачи);

- наблюдение геометрических форм в окружающих предметах и формирование на этой основе абстрактных геометрических фигур и отношений;
- решение специально подобранных упражнений и задач, натравленных на формирование приемов мыслительной деятельности;
- формирование потребности к логическим обоснованиям и рассуждениям;
- специальное обучение математическому моделированию как методу решения практических задач;
- работа с одаренными детьми в рамках подготовки к предметным олимпиадам и конкурсам.

6. Формы и методы работы.

Формы занятий:

- Групповые
- Парные
- Коллективные
- Индивидуальные

Беседы. Игра. Лабораторная работа. Театрализация исторических событий становления математической науки. Конференция при подведении итогов исследовательской работы. Работа с научно-популярной литературой. Олимпиады, математические праздники, конкурсы решения задач.

Методы работы:

- Словесные
- Практические
- Создание ситуаций, ориентированных на успех ребенка
- Методы стимулирования
- Контроля и самоконтроля

Структура курса.

Курс занятий в 8 классе является одной из важных составляющих работы с детьми, чья одаренность на настоящий момент может быть еще не проявившейся, а также просто способных детей, в отношении которых есть серьезная надежда на дальнейший качественный скачок в развитии их способностей. Темы программы непосредственно примыкают к основному курсу математики 8 класса. В результате занятий учащиеся должны приобрести навыки и умения решать более трудные и разнообразные задачи, а также задачи олимпиадного уровня.

Включенные в программу вопросы дают возможность учащимся готовиться к олимпиадам и различным математическим конкурсам, ВПР. Особое внимание уделяется решению задач повышенной сложности.

Построение курса обеспечивает обучающимся:

- формирование готовности к саморазвитию и непрерывному образованию;
- активную учебно-познавательную деятельность;
- построение образовательного процесса с учетом индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей.
- параллельно осуществляется и воспитательный процесс: работа в команде, совместная проектная и исследовательская деятельность, отстаивание своей позиции и толерантное отношение к чужому мнению формируют качества личности, ценностные ориентиры школьников, отвечающие современным потребностям общества.

При системно-деятельностном подходе основными технологиями обучения являются проблемно-поисковая, исследовательская технологии. Именно они позволяют создать такое образовательное пространство, в котором ученик становится субъектом процесса обучения.

Привлечь интерес детей к предмету помогут театральные постановки, в которых отражается история развития науки, идут повествования о великих математиках и их заслугах. Знакомство с историческими сведениями через театрализацию - один из интереснейших и надежных способов качественного усвоения знаний. Вместе с тем театральная работа способствует не только развитию познавательного интереса учащихся, воображения, эрудиции, самостоятельности, но и создает условия, обеспечивающие творческую деятельность обучаемых. Именно театральная деятельность позволит объединиться детям разной степени подготовки, а значит, легче будет вместе преодолевать психологический барьер перед сложной наукой. Изучая математику через театральную деятельность, прививаем интерес к предмету, а значит, повышаем мотивацию.

Основное содержание учебного курса.

Предполагаемая результативность курса:

Программа обеспечивает достижение следующих результатов освоения образовательной программы основного общего образования:

личностные:

1) сформированность ответственного отношения к учению, готовность и способности, обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию, выбору дальнейшего образования на базе ориентировки в мире профессий и профессиональных предпочтений, осознанному построению индивидуальной образовательной траектории с учётом устойчивых познавательных интересов;

2) сформированность целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики;

3) сформированность коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими, в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности;

4) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

5) представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах её развития, о её значимости для развития цивилизации;

6) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;

7) креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении алгебраических задач;

8) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

9) способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

метапредметные:

1) умение самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

2) умение осуществлять контроль по результату и по способу действия на уровне произвольного внимания и вносить необходимые коррективы;

3) умение адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, её объективную трудность и собственные возможности её решения;

4) осознанное владение логическими действиями определения понятий, обобщения, установления аналогий, классификации на основе самостоятельного выбора оснований и критериев, установления родовидовых связей;

5) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и выводы;

6) умение создавать, применять и преобразовывать знаковосимволические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;

7) умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределение функций и ролей участников, взаимодействие и общие способы работы; умение работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов; слушать партнёра; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение;

8) сформированность учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно- коммуникационных технологий (ИКТ-компетентности)

9) первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники, о средстве моделирования явлений и процессов; 10) умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни;

11) умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять её в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации;

12) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

13) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимать необходимость их проверки;

14) умение применять индуктивные и дедуктивные способы рассуждений, видеть различные стратегии решения задач;

15) понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

16) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

17) умение планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера.

предметные:

1) умение работать с математическим текстом (структурирование, извлечение необходимой информации), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), обосновывать суждения, проводить классификацию, доказывать математические утверждения;

2) владение базовым понятийным аппаратом: иметь представление о числе, владение символьным языком алгебры, знание элементарных функциональных зависимостей, формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их

изучения, об особенностях выводов и прогнозов, носящих вероятностный характер;

3) умение выполнять алгебраические преобразования рациональных выражений, применять их для решения учебных математических задач и задач, возникающих в смежных учебных предметах;

4) умение пользоваться математическими формулами и самостоятельно составлять формулы зависимостей между величинами на основе обобщения частных случаев и эксперимента;

5) умение решать линейные и квадратные уравнения и неравенства, а также приводимые к ним уравнения, неравенства, системы; применять графические представления для решения и исследования уравнений, неравенств, систем; применять полученные умения для решения задач из математики, смежных предметов, практики;

6) овладение системой функциональных понятий, функциональным языком и символикой, умение строить графики функций, описывать их свойства, использовать функционально-графические представления для описания и анализа математических задач и реальных зависимостей;

7) овладение основными способами представления и анализа статистических данных; умение решать задачи на нахождение частоты и вероятности случайных событий;

8) умение применять изученные понятия, результаты и методы при решении задач из различных разделов курса, в том числе задач, не сводящихся к непосредственному применению известных алгоритмов.

Календарно-тематическое планирование

Календарно-тематическое планирование

№	Наименование разделов и дисциплин	Всего часов
8 класс		
1.	**Арифметика. Математика и окружающий мир.**	**8**
1.1	Различные системы счисления	2
1.2	Решение арифметических задач повышенной трудности	2
1.3	Математика на каждом шагу (решение задач с практическим содержанием)	2
1.4	Замечательные свойства натуральных чисел	2
2.	**Планиметрия**	**8**
2.1	Геометрические упражнения с листком бумаги	2
2.2	Задачи на разрезание и перекраивание фигур	2
2.3	Занимательные задачи на построение	2

2.4	Осевая симметрия	1
2.5	Центральная симметрия на плоскости	1
3.	**Алгебра**	**10**
3.1	Занимательные и исторические задачи на составление уравнений	2
3.2	Неопределенные уравнения первой степени	2
3.3	Разложение многочленов на множители	2
3.4	Решение и исследование алгебраических уравнений и систем уравнений	2
3.5	Математический турнир	2
4.	**Графики функций**	**9**
4.1	Линейная функция и ее график	1
4.2	Свойства линейной функции	1
4.3	График квадратичной функции	1
4.4	Графическое решение систем уравнений и квадратных уравнений	1
4.5	Построение, чтение и применение графиков	2
4.6	Защита проектов	2

Основное содержание курса

8 класс (34 часа)

1 глава. Арифметика. Математика и окружающий мир (8 часов).

Различные системы счисления. Решение арифметических задач повышенной трудности Математика на каждом шагу (решение задач с практическим содержанием). Замечательные свойства натуральных чисел

2 глава. Планиметрия (8 часов).

Геометрические упражнения с листком бумаги. Задачи на разрезание и перекраивание фигур. Занимательные задачи на построение. Осевая симметрия. Центральная симметрия на плоскости

3 глава. Алгебра (10 часов).

Занимательные и исторические задачи на составление уравнений. Неопределенные уравнения первой степени. Разложение многочленов на множители. Решение и исследование алгебраических уравнений и систем уравнений. Математический турнир

4 глава. Графики функций (8 часов).

Линейная функция и ее график. Свойства линейной функции. График квадратичной функции. Графическое решение систем уравнений и квадратных уравнений. Построение, чтение и применение графиков. Защита проектов. Итоговое занятие

Методические блоки к главам факультативного курса 8 класса

Различные системы счисления

1. **Вводная задача. «Загадочная автобиография»** (Другой вариант см. в «Занимательной арифметике» Я.И. Перельмана)

В бумагах одного математика была найдена странная автобиография: «Я окончил школу 33-летним юношей и поступил в том же году в институт, который успешно окончил в возрасте 42 лет. Вместе со своей маленькой сестренкой, которая училась в III классе средней школы и была в возрасте 20 лет, я поехал на учительскую работу. Школа помещалась в 10 км от железной работы. Это расстояние я не спеша, легко преодолевал за 1 час, а на велосипеде даже за каких-нибудь 100 минут. Работа в школе мне давалась легко, нагрузка у меня была небольшая: 100 часов в неделю. Сестра моя училась очень хорошо и через 12 лет окончила десятилетку, будучи еще совсем молоденькой девушкой: Как расшифровать эту странную автобиографию? Задача будет решена позже, после того как мы познакомимся с системами счисления. (Ответ: запись в пятеричной системе счисления.)

2. **Рассказ учителя о различных системах счисления, о применении их в настоящее время**

При подсчете многих объектов удобно группировать их по нескольку штук. Такая группировка облегчает счет. Поскольку удобно считать на пальцах, предметы часто группируют по 5 или по 10 (впрочем, иногда и по 12 – вспомните слово «дюжина»; иногда и по 7 – в неделе 7 дней)

Система счисления – это способ записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций. В римской системе счисления есть особые знаки: для единицы – I, пяти – V, десяти – X, пятидесяти – L, ста – C, пятисот – D, тысячи – M. Примеры записи чисел в римской системе приведены в таблице. Римская система более или менее пригодна для выполнения операций сложения и вычитания, но совсем не удобна для умножения и деления.

Запись чисел в различных системах счисления.

Десятичная	Римская	Двоичная	Троичная	Четверичная
1	I	1	1	1
2	II	10	2	2
3	III	11	10	3
4	IV	100	11	10
5	V	101	12	11
6	VI	110	20	12
7	VII	111	21	13
8	VIII	1000	22	20
9	IX	1001	100	21
10	X	1010	101	22
11	XI	1011	102	23
12	XII	1100	110	30
13	XIII	1101	111	31
14	XIVI	1110	112	32
15	XVI	1111	120	33
16	XVI	10000	121	100
17	XVII	10001	122	101
18	XVIII	10010	200	102
19	XIX	10011	201	103
20	XX	10100	202	110
21	XXI	10101	210	111
22	XXII	10110	211	112
28	XXVIII	11100	1001	130
48	XLVIII	110000	1210	300
101	CI	1100101	10202	1211
151	CLI	10010111	12121	2113
1966	MCMLXVI	11110101110	2200211	132232
1980	MCMLXXX	11110111100	2201100	132330
1997	MCMXCVII	11111001101	2201222	133031
2000	MM	11111010000	2202002	133100
5000	MMMMM	1001110001000	20212012	1032020

Если в записи положение цифр (знаков) не играет важной роли, то систему счисления называют непозиционной. Непозиционными были системы счисления у древних египтян, греков. У древних вавилонян система счисления вначале тоже была непозиционной, но впоследствии они научились использовать информацию, заключенную в порядке записи цифр, и перешли к позиционной системе счисления. При этом в отличие от используемой нами системы счисления, в которой значение цифры меняется в 10 раз при перемещении на одну позицию, у вавилонян при перемещении знака происходило изменение значения числа в 60 раз. Следы вавилонской системы счисления сохранились до наших дней: в часе – 60 минут, в минуте – 60 секунд.

Долгое время в вавилонской системе счисления не было нуля, то есть знака для «пропущенного» разряда. В IX веке появился особый знак для нуля. Десятичная система распространилась по всему миру.

Например, записывая 2653, мы имеем в виду число $2\cdot10^3+6\cdot10^2+5\cdot10^1+3\cdot10^0$. Особая роль отводится числу десять: все числа представляются в виде суммы различных степеней десяти с коэффициентами, принимающими значения от 0 до 9. Поэтому эта система и называется десятичной. А что будет, если вместо десяти использовать какое-нибудь другое число, например шесть? По аналогии нам потребуется шесть цифр-символов. В качестве их мы можем взять знакомые нам символы 0,1,2,3,4,5, которые будут обозначать числа от нуля до пяти. Число шесть мы примем за единицу следующего разряда, и поэтому в нашей новой системе счисления оно будет записываться так: 10. Продолжая аналогию, мы можем представить любое натуральное число в виде суммы различных степеней шестерки с коэффициентами от нуля до пяти. Например, $7=1\cdot6^1+1\cdot6^0$ или $45=1\cdot6^2+1\cdot6^1+3\cdot6^0$. Поэтому, в новой системе счисления, которая называется шестеричной, естественно записывать число 7_{10} как 11_6, 45_{10} как 113_6 (индекс у числа означает, что это число записано в данной системе счисления).

Нетрудно понять, что в шестеричной системе счисления можно записать любое натуральное число. Покажем, как это сделать для числа 450_{10}. Наибольшее число, являющееся степенью шестерки и не превосходящее 450, - это 216. Разделим 450 на 216 с остатком: $450=2\cdot216+18$.

Неполное частное равно 2. Поэтому первой цифрой шестеричной записи числа 450 будет 2.

Остаток от деления равен 18. Разделим его на предыдущую степень шестерки (на первом этапе мы делили на 6^3, а теперь на 6^2) с остатком: $18=0\cdot36+18$. Неполное частное равно 0, поэтому вторая цифра – 0. Остаток равен 18.

Разделим с остатком 18 на 6^1: $18=3\cdot6+0$. Значит, третья цифра равна 3, остаток – 0. Таким образом, последняя цифра равна 0. Итак, $450_{10}=2030_6$.

При построении новой системы счисления мы не пользовались никакими специфическими свойствами числа 6. Аналогично по любому натуральному числу $n, n > 1$, можно построить n-ичную систему счисления, в которой запись числа связана с его разложением по степеням числа n.

Еще в XVII веке немецкий математик Лейбниц предложил перейти на двоичную систему счисления, но этому помешала не только традиция, но и то, что в двоичной системе счисления запись чисел слишком длинна. Например, $106 = 1101010_2$.

Однако в XX веке, когда были созданы компьютеры, оказалось, что для выполнения арифметических операций на машинах самой удобной является именно двоичная система счисления.

Удобным компромиссом между человеком и машиной являются шестнадцатеричная и восьмеричная системы счисления. Дело в том, что очень легко переводить числа из двоичной системы в любую из них, а по краткости записи восьмеричная система почти такая же, как десятичная, а шестнадцатеричная даже короче.

Операции над натуральными числами в n-ичной системе счисления выполняются в обычном порядке, с той лишь разницей, что для каждой системы счисления надо брать свои таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы счисления таблицы таковы:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

В двоичной системе счисления таблицы сложения и умножения удивительно просты:

0+0=0 $0 \cdot 0 = 0$

0+1=1 $0 \cdot 1 = 0$

1+1=10 $1 \cdot 1 = 1$

Пользуясь этими таблицами, легко складывать и вычитать:

10+11=101, 111+101+1100, 101+11=10, 110110011+10111=111001010.

Эти примеры в десятичной системе выглядят следующим образом:

2+3=5, 7+5=12, 5-3=2, 435+23=458.

Умножаем в двоичной системе:

$11101 \cdot 101 = 10010001$, $10111011 \cdot 1100101 = 100100111000111$, $11011 \cdot 1101 = 101011111$.

В десятичной системе эти примеры выглядят так:

$29 \cdot 5 = 145$, $187 \cdot 101 = 18887$, $27 \cdot 13 = 351$.

В двоичной системе можно записывать не только целые числа. Например, двоичная запись 101,1010111 в десятичную систему переводится следующим образом:

$$4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=5{,}6796875.$$

3. Решение задач на переход от недесятичной системы счисления к десятичной, и наоборот

1. Запишите в указанной системе счисления

А) $1587=x_2$; Б) $178=x_3$; В) $594=x_6$; Г) $354_6=x_2$; Д) $2531_7=x_6$; Е) $937=x_2$; Ж) $12021001012_3=x_{10}$; З) $2234210_5=x_3$.

2. Выполните действия

А) 2131_4+3201_4; Б) $231342_5-42123_5$; В) 254_6+342_6; Г) 32120_4+5271_8;

Д) 425_9-723_8; Е) $320_5:32_5$; Ж) $43211_5:100_3$; З) $231_7\cdot 24_6$.

3. Найдите основание системы счисления

А) $43_x=27$, Б) $324_x=89$, В) $421_x-143_x=234_x$; Г) $53_x\cdot 16_x=880_x$

4. «Странная семья». У меня 100 братьев, младшему 1000 лет, а старшему 1111 лет. Старший учится в 1001 классе. Что это за семья?

5. Запишите число 111_{10} в одиннадцатеричной системе счисления (в качестве недостающей цифры 10 принято использовать букву А).

6. Запишите число 1110100111_2 в шестнадцатеричной системе счисления (в качестве недостающих цифр от 10 до 15 принято использовать буквы A, B, C, D, E, F).

4. Фокусы, связанные с различными системами счисления.

Угадывание предмета по таблицам

Ведущий. Вы видите перед собой различные геометрические фигуры и инструменты. В этой таблице выписаны все их названия.

1. Куб.
2. Шар.
3. Окружность.
4. Круг.
5. Линейка.
6. Циркуль.
7. Цилиндр.
8. Треугольник.
9. Квадрат.
10. Параллелограмм.
11. Сегмент.
12. Транспортир.
13. Сектор.
14. Пирамида.
15. Трапеция.

Они же выписаны в этих четырех таблицах.

Таблица №1	Таблица №2	Таблица №3	Таблица №4

Куб	Шар	Круг	Треугольник
Сектор	Окружность	Линейка	Трапеция
Трапеция	Цилиндр	Циркуль	Сектор
Сегмент	Циркуль	Сектор	Пирамида
Окружность	Трапеция	Транспортир	Транспортир
Линейка	Пирамида	Трапеция	Квадрат
Цилиндр	Сегмент	Пирамида	Параллелограмм
Квадрат	Параллелограмм	Цилиндр	Сегмент

Можете выбрать любой из этих предметов так, чтобы я не видел. Я берусь с помощью несложных расчетов установить, какой предмет вы выбрали. Кто желает проделать этот фокус?

К доске идет ученик М.

Ведущий отворачивается так, что видит только таблицу, в которой 15 названий, но не видит ни остальных таблиц, ни самих предметов. Затем он продолжает: «Выбери, М., любой из предметов на столе. Подними его так, чтобы видели все, кроме меня. Записан ли этот предмет, в таблице № 1?» - «Да». «А в таблице №2?» - «Нет». – «А в таблице № 3?» - «Да». – «А в таблице №4?» - «Нет».

Ведущий. Я угадываю: ты выбрал линейку.

Объяснение. Каждому предмету соответствует определенное число – номер, под которым название предмета значится в таблице с 15 предметами. Например, сектору соответствует число 13, линейке – число 5. Переведем все эти номера в двоичную систему счисления. Тогда каждое из чисел записывается не более чем четырьмя цифрами. Например, число 14 запишется как 1110, число 5 запишется как 101 или (что то же) 0101.

Таблицы составлены так. В первой таблице помещаются такие, и только такие слова, чьи номера в двоичной системе счисления имеют на первом месте 1. Например, слову «сектор» соответствует число 13, в двоичной системе счисления 1101; на первом месте справа – 1; поэтому мы это слово помещаем в таблицу №1. В таблицу № 2 помещаем те слова, чьи номера в двоичной системе счисления имеют на втором месте (считая справа налево) цифру 1. Например, слово «цилиндр» входит под номером 7, то есть в двоичном разложении под номером 111. Вторая справа с конца – 1. Мы поэтому слово «цилиндр» включаем в таблицу №2. Аналогично составлены таблицы № 3 и № 4. Например, в таблице № 4 помещаются те слова, в чьих номерах (в двоичной записи) на четвертом месте (считая справо налево) стоит 1. Когда М. говорит, что выбранный им предмет имеется в таблице № 1 и № 3, но не значится в таблицах № 2 и № 4, я могу записать номер этого предмета в двоичной системе счисления: 0101; или в десятичной системе счисления $0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$, то есть 5. Под номером 5 в таблице из 15 предметов значится слово «линейка». Значит, М. выбрал линейку.

Угадывание любого целого числа от 1 до 31 с помощью двоичной системы счисления

Пусть этот фокус проводят два ученика – А и Б.

Б выходит из комнаты, А вызывает к столу 5 учеников (кто желает) и выстраивает их в один ряд. Затем он предлагает присутствующим в комнате называть любое число от 1 до 31. В уме он переводит число в двоичную систему счисления и расставляет учащихся так, чтобы нулю соответствовал ученик, стоящий лицом к присутствующим, а единице – ученик, стоящий несколько боком к аудитории. Например, если предложено число 13, то в двоичной системе счисления оно запишется так: 1101 или (что то же) 01101. Затем А уходит в сторону (или вовсе выходит из комнаты). Приглашают Б, и он, посмотрев на пятерку учеников, восстанавливает в уме по их расположению загаданное число (сначала в двоичной системе, а затем переводит в десятичную). Можно видоизменить этот эффектный фокус, например, ставить вместо нулей и единиц мальчиков и девочек или вместо нуля книгу лицевой стороной, а вместо единицы ставить книгу задней обложкой к зрителю.

5. Дополнительные задачи

1. Докажите, что разность между трехзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, не может быть квадратом натурального числа в десятичной системе счисления.
2. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Бриллиант массы m разделен на две части. В каком случае общая цена двух частей будет наименьшей?
3. За 3,5 часа работы один штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 часов работы может изготовить 60% всех деталей, а скорость выполнения работы на третьем прессе относится к скорости выполнения работы на втором прессе как 6:5. За сколько времени будет выполнен весь заказ, если все три пресса будут работать одновременно?
4. Средняя линия трапеции равна 20 см и делит площадь трапеции в отношении как 2:3. Найдите длины оснований трапеции.

Ответы:

1. А) $1587 = 3063_8 = 11000110011_2$; Б) $178 = 2012 \cdot 1_3$; В) $594 = 2430_6$; Г) $354_6 = 10001110_2$; Д) $2531_7 = 12425_6$; Е) $937 = 1110101001_2$; Ж) $12021001012_3 = 103550$; З) $2234210_5 = 39930 = 2000202220_3$.

2. Г) 11100101001_2 Д) -170_8 Е) 10_5 Ж) 309 З) $231_7 \cdot 24_6 = 120 \cdot 28 = 3360$.

3. А) $x = 6$; Б) $x = 5$ В) $x = 6$ Г) $x = 9$.

4. Числа записаны в двоичной системе. В семье четыре брата. Младшему 8 лет, а старшему 15 лет, он учится в 9 классе.

Дополнительные задачи

1. Пусть трехзначное число будет $\overline{abc}$, а разность d. Тогда $d = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c) = 9 \cdot 11(a - c)$. Так как $(a - c) < 11$, то $d \neq n^2$.

2. Пусть масса первой части будет $\frac{m}{2}+x$. Тогда масса второй части $\frac{m}{2}-x$. Цена первой части $a\left(\frac{m}{2}+x\right)^2$, цена второй части $a\left(\frac{m}{2}-x\right)^2$, цена двух частей бриллианте равна $a\left(\frac{m}{2}+x\right)^2+a\left(\frac{m}{2}-x\right)^2=a\left(\frac{m^2}{2}+2x^2\right)$. Она будет наименьшей при $x=0$, то есть, когда бриллиант разделят на две равные части.

3. Найдем время выполнения заказа каждым прессом:

$3{,}5:0{,}42=8\frac{1}{3}(\div)$,$9:0{,}6=15(\div)$;$15:x=6:5$, где x – время выполнения заказа третьим прессом.

Значит, $x=12{,}5$ (ч). Искомое время равно $1:\left(\frac{1}{8\frac{1}{3}}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12{,}5}\right)=3\frac{3}{4}(\div)$.

4. 12 см и 28 см.

6. Примеры устных упражнений

1. Вычислить устно: А) $34\cdot 48+18\cdot 12+23\cdot 24$ Б) $\frac{120\cdot 239-119}{119\cdot 239+120}$ В) $195\cdot 6$

Г) $63+29$ Д) $\left(4\frac{1}{5}-6\frac{4}{5}+3{,}6\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)$.

2. Тане не хватает 2 руб. для покупки 8 воздушных шаров. Если она купит 5 шаров, то у нее останется 10 рублей. Сколько стоит шар? (Ответ: 4 рубля)

3. В семье пять братьев. У каждого из них есть одна сестра. Сколько всего детей в семье? (Ответ: 6)

4. Три землекопа за 2 ч вырыли 3 ямы. Сколько ям выроют 6 землекопов за 5 часов?

(Ответ: за 2 часа 6 землекопов выроют 6 ям, за 5 часов – в 2,5 раза больше, то есть 15 ям)

5. Один восьмиклассник о себе писал так: «Пальцев у меня 24, на каждой руке 5, а на ногах 12». Как же так могло быть? (Ответ: ученик воспользовался восьмеричной системой счисления: $24_8=2\cdot 8+4=20_{10}$, $12_8=1\cdot 8+2=10_{10}$.)

6. Решите уравнение $|x-2008|=2009$.

7. Можно ли расставить 10 стульев вдоль стен квадратной комнаты так, чтобы возле каждой стены было поровну стульев? (Ответ: Можно. Надо поставить по стулу в два противоположных угла комнаты и, кроме этого, по два стула у каждой стены.)

7. Пример «десятиминутки»

Как умножить в уме два двузначных числа, близких к 100?

$94\cdot 97=9118$

Как я произвела умножение?

Я узнаю, каков недостаток первого сомножителя (94) до 100. Это будет 6. Недостаток второго сомножителя (97) до 100 равен 3. Затем я из одного сомножителя (94) вычитаю недостаток (3) второго сомножителя до 100; получаю 91. Приписываю к результату произведение $3 \cdot 6$, то есть 18.

Значит, $94 \cdot 97 = 9118$

6 3

Я пользуюсь правилом: если надо перемножить два двузначных числа, близких к 100, то можно поступать так: найти недостатки сомножителей до сотни; вычесть из одного сомножителя недостаток второго до сотни; к результату приписать двумя цифрами произведение недостатков сомножителей до сотни.

Возьмем другой пример: $98 \cdot 86 = 8428$

2 14

А почему можно так умножать числа? Ответ на этот вопрос дает алгебра.

Пусть нужно перемножить двузначные числа x и y, близкие к 100.

$x = 100 - a$, где $a -$ недостаток числа x до 100. $y = 100 - b$.

$$x \cdot y = (100 - a)(100 - b) = (100 - a) \cdot 100 - 100b + ab = (100 - a - b) \cdot 100 + ab = (x - b) \cdot 100 + ab$$

Итак, в произведении всего $x - b$ сотен и, кроме того, еще ab единиц. Отсюда и вытекает наше правило. Оно наиболее удобно, если a и b меньше 25.

Предложите теперь два трехзначных числа, близких к 1000.

$997 \cdot 936 = 933192$

3 64

Учащимся предлагается сформулировать и доказать самим дома правило для умножения трехзначных чисел, близких к 1000.

Неопределенные уравнения первой степени

Самые разные задачи практического содержания часто приводят к уравнениям, в которых неизвестные по своему смыслу могут принимать только целочисленные значения. Уравнения в целых числах рассматривались еще в глубокой древности. Особенно много ими занимался александрийский математик Диофант, имя которого и носят уравнения в целых числах. Простейшим примером диофантова уравнения служит линейное уравнение $ax + by = c$ в целых числах (естественно с целыми коэффициентами a, b, c). Оно может быть решено разными способами.

Пусть a, b, c - ненулевые целые числа. Уравнение $ax + by = c$ в целых числах не имеет решений, если число с не делится на наибольший общий делитель пары чисел a, b.

Задача 1. Можно ли набрать сумму в 1000 рублей с помощью купюр достоинством в 1 рубль, 10 рублей, 100 рублей таким образом, чтобы всего было использовано ровно 40 купюр?

Решение.

Если сумму в 1000 рублей можно набрать с помощью x, y, z купюр достоинством в 1 рубль, 10 рублей, 100 рублей соответственно, то справедливо равенство $x+10y+100z=1000$. Если, к тому же, всего купюр должно быть $x+y+z=40$, то целые числа y, z должны удовлетворять уравнению $(40-y-z)+10y+100z=1000$, или $9y+99z=960$. Так как число 960 не делится на наибольший общий делитель пары чисел 9 и 99, равный 9, то уравнение не имеет решений.

Ответ: нельзя.

Задача 2. Затруднение кладовщика.

На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика?

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $16x+17y+40z=140$ в целых неотрицательных числах.

Заметим, что число y не может быть равным 0, так как иначе уравнение $16x+40z=140$ в целых числах имело бы решение, что противоречило бы утверждению задачи (ибо число 140 не делится на число 8 (наибольший общий делитель чисел 16 и 40). Далее, число x также не может быть равным 0, так как иначе было бы выполнено равенство $17y=140-40z=10(14-4z)$ и неотрицательное число $14-4z$ делилось бы на 17 прицелом неотрицательном значении z, что невозможно. Наконец, число z также не может быть равным 0, так как иначе из равенства $17y=140-16x=4(35-4x)$ следовало бы, что число $35-4x$ кратно 17 при $x>0$, что невозможно.

Таким образом, числа x, y, z должны быть положительными, а числа $x'=x-1$, $y'=y-1, z'=z-1$- целыми неотрицательными, удовлетворяющими уравнению $16x'+17y'+40z'=67$.

Аналогичные рассуждения показывают, что $y'\neq 0, x'\neq 0,$ то есть числа $x''=x'-1$ и $y''=y'-1$ должны удовлетворять уравнению $16x''+17y''+40z'=34,$ в целых неотрицательных числах, которое имеет единственное решение $x''=0, y''=2, z'=0.$ Таким образом, возвращаясь к исходным неизвестным, мы получаем единственное решение первоначального уравнения $x=2, y=4, z=1,$ то есть 140 кг гвоздей можно отпустить только с помощью 2 ящиков по 16 кг, 4 ящиков по 17 кг и 1 ящика в 40 кг.

Задача 3. Состав с углем.

На станцию привезли 420 т угля в вагонах вместимостью по 15 т, по 20 т и по 25 т. Сколько каких вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?

Решение.

Пусть было использовано x, y, z вагонов вместимостью по 15 т, по 20 т и по 25 т соответственно. Тогда имеем $15x+20y+25z=420,$ $x+y+z=27$, то есть числа y, z должны удовлетворять уравнению $15(27-y-z)+20y+25z=420$ в натуральных числах. Преобразовывая это уравнение, получаем

$y+2z=3$, то есть $y=z=1$ и $x=25$. Итак, было использовано 25 вагонов по 15 т, 1 вагон в 20 т и 1 вагон в 25 т.

Общее решение.

Пусть пара чисел $x=x_0$, $y=y_0$ удовлетворяют уравнению $ax+by=c$ в целых числах с взаимно простыми коэффициентами a,b. Докажем, что формулы $x=x_0+bk, y=y_0-ak$ с целым параметром k задают все решения этого уравнения.

Доказательство.

Если пара чисел x,y наряду с парой чисел x_0,y_0 удовлетворяет уравнению $ax+by=c$ в целых числах с взаимно простыми коэффициентами a,b, то имеем $ax+by=ax_0+by_0$, откуда $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Так как число $x-x_0=\dfrac{b(y_0-y)}{a}$ является целым, а числа a,b не имеют общих делителей, то число $k=\dfrac{y_0-y}{a}$ также является целым. Поэтому $x-x_0=bk$ и $y-y_0=ak$, откуда получаем равенства $x=x_0+bk, y=y_0-ak$.

Мы доказали, что любое решение уравнения задается указанными формулами. С другой стороны, при любом целом значении k имеем $a(x_0+bk)+b(y_0-ak)=ax_0+by_0=c$, то есть ничего кроме решений эти формулы не задают.

Задача 4. Сколько нужно мешков?

Для перевозки зерна имеются мешки, в которые входит либо 60 кг, либо 80 кг зерна. Сколько надо заготовить тех и других мешков для загрузки 1 т зерна таким образом, чтобы все мешки были полными? Какое наименьшее количество мешков при этом может понадобиться?

Решение.

$60x+80y=1000$ или $3x+4y=50$.

Одно целочисленное решение этого уравнения нетрудно угадать $x=-50, y=50$.

Учитывая формулы общего решения, получаем: $x=-50+4k, y=50-3k$.

Теперь для того, чтобы найти все натуральные решения, наложим ограничения $4k-50\ge 0,\quad 50-3k\ge 0,$ из которых выведем оценки $12<k<17$.

Таким образом, полагая последовательно $k=13,\ 14,\ 15,\ 16$, найдем все неотрицательные решения: $x_1=2, y_1=11;\quad x_2=6, y_2=8;\quad x_3=10, y_3=5;\quad x_4=14, y_4=2.$

Наименьшее количество мешков $x+y=13$ достигается при первом из найденных решений.

Дополнительные задачи.

1. У продавца имеются 100-граммовые гирьки и консервные банки весом по 450 г. Как с их помощью отвесить на чашечных весах 2,5 кг сахарного песка за один раз, используя для взвешивания наименьшее количество гирек и банок в общей сложности?

Ответ: продавец должен на одну чашку весов положить 6 банок, а на другую 2 гирьки и взвешиваемый сахар. Весы уравновесятся, если сахара будет 2,5 кг.

2. Решите в целых неотрицательных числах уравнения: $2x-246y=345$; $69x-91y=1996$.

3. Решите уравнения в целых числах: $5x+8y=29$; $89x-144y=1$; $7x+4y-9z=89$.

4. При каких натуральных n число $8n+3$ делится на 13?

5. Мой брат купил несколько одинаковых ручек. Каждая ручка стоили 13 рублей. Брат имел деньги достоинством только в 5 рублей. Уплатил он все свои деньги (у него было больше 200 рублей, но меньше 300 рублей), и продавец дал ему сдачи 1 рубль. Сколько ручек купил брат?

Устные упражнения

1. Встретилась необходимость устно перемножить числа 85 и 95. Укажите 2-3 удобных способа для умножения «в уме» этих чисел.

2. Вычислить $99-97+95-93+...+3-1$. Ответ: 50

3. Правильная или неправильная дробь: $\dfrac{244\cdot 395-151}{244+395\cdot 243}$?

4. Множимое увеличили на 20%, а множитель уменьшили на 20%. Как изменится произведение? (Уменьшилось на 4%)

5. После того как пешеход прошел 1 км и половину оставшегося пути, ему еще осталось пройти треть всего пути и один километр. Чему равен весь путь? Ответ: 9 км.

6. Существуют ли треугольники, у которых один из углов равен разности двух других углов? Ответ: прямоугольные треугольники, так как если $\angle 1=\angle 2-\angle 3$, то есть $\angle 2=\angle 1+\angle 3$. Но $\angle 2=180^0-(\angle 1+\angle 3)$ или $\angle 2=180^0-\angle 2$, то есть $\angle 2$ - прямой.

Пример «десятиминутки»

Как возвести в квадрат число, близкое к 50?

Назовите любое число, близкое к 50, но большее, чем 50?

Например, 58. $58^2=3364$. Как я так быстро и устно произвела вычисления?

Объясним смысл выражения: приписать к данному числу a двумя цифрами другое данное число b.

Это означает: умножить число a на 100 и к тому, что получится, прибавить число b.

Пусть мне нужно возвести в квадрат число x, близкое к 50, но большее 50. Число это запишем так: $x=50+a$, где a - избыток числа x над 50.

Например: 58=50+8, $x=58, a=8$.

Итак, $x=50+a, a=x-50$.

$x^2=(50+a)^2=2500+100a+a^2=(25+a)\cdot 100+a^2=(25+x-50)\cdot 100+a^2=(x-25)\cdot 100+a^2$ Итак, если возводим в квадрат число x, то в результате сотен будет $x-25$. И, кроме того, еще a^2 единиц.

Отсюда следует правило: если требуется возвести в квадрат число, близкое к 50, но большее 50, то можно поступить так: 1) вычесть из этого числа 25, 2) приписать к результату двумя цифрами квадрат избытка данного числа над 50.

Примеры: $58^2 = 3364$

Объяснение. $58 - 25 = 33$, $8^2 = 64$, $58^2 = 3364$.

Ученикам предлагается самостоятельно придумать прием возведения в квадрат чисел, близких к 50, но меньших 50 (или чисел, близких к 500).

Геометрические упражнения с листом бумаги

Среди множества возможных действий с бумагой особое место занимает операция ее перегибания. Одним из достоинств этой операции является то, что ее можно производить, не имея под рукой никаких дополнительных инструментов – ни линейки, ни циркуля, ни даже карандаша. Этим вы, конечно, неоднократно пользовались, когда складывали из бумаги пилотку, кораблик и т.п.

Практические свойства бумаги порождают своеобразную геометрию, с элементами которой мы и познакомимся. Роль линий в этой геометрии будут играть края листа и складки, образующиеся при его перегибаниях, а роль точек – вершины углов листа и точки пересечения складок друг с другом или с краями листа. Оказывается, возможности операции перегибаний листа очень велики. То, что они включают в себя всю геометрию одной линейки, не вызывает сомнений. Но они в определенной степени таят в себе также и возможности циркуля, хотя и не позволяют проводить непосредственно дуги окружности.

Заметим, что при реальной работе с бумагой нужно учитывать следующие обстоятельства. Если складывать лист бумаги в несколько раз, то сами складки получаются все менее и менее четкими из-за того, что настоящая бумага имеет некоторую, пусть незначительную, но ненулевую толщину. Этот эффект иногда начинает проявляться уже при втором перегибании. Следовательно, решая задачи на нашем занятии, мы должны складывать бумагу по возможности в меньшее число раз. Будем искать более экономные пути решения. Для решения задач необходимо обеспечить всех учащихся индивидуальными листами глянцевой цветной бумаги (на лицевой и оборотной сторонах – разные цвета).

Задача 1. Середина отрезка.

На листе бумаги отмечены две точки A и B. Как с помощью перегибаний этого листа разделить отрезок AB пополам?

Обычно бумагу перегибают следующим образом: одну часть листа накладывают на другую, и прижав их друг к другу в определенном месте одной рукой, разглаживают оба листа другой рукой до образования складки. Если при этом некоторые две точки A и B бумаги оказались прижатыми друг к другу, то любая точка C складки будет равноудалена от точек A и B, так как отрезки AC и BC после разглаживания окажутся прижатыми друг к другу. Поскольку множество таких точек C совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку AB, то полученная складка будет прямой линией.

Итак, мы перегибаем лист бумаги по прямой линии так, чтобы сами точки остались на видимой стороне бумаги после перегибания. Тогда, прижав друг к дугу точки A и B неразвернутого листа и разгладив этот лист, мы получим искомую точку C на прямой AB, равноудаленную от точек A и B.

Задача 2. Перпендикуляр к прямой.

Как с помощью перегибаний листа бумаги провести прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную точку?

Задача 3. Параллельная прямая.

Как с помощью перегибаний листа бумаги провести прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку?

Проведем сначала перпендикуляр к данной прямой, а потом проведем перпендикуляр к полученной прямой, проходящей через данную точку. Последняя прямая будет параллельна данной, так как обе они перпендикулярны одной и той же прямой.

Задача 4. Центр круга.

Как с помощью перегибаний найти центр вырезанного из бумаги круга? Можно ли найти центр круга, нарисованного на непрозрачной бумаге?

Если круг вырезан из бумаги, то, перегнув его пополам по некоторому диаметру AB (для этого нужно, чтобы при наложении две полуокружности, совместились друг с другом), а затем перегнув лист еще раз так, чтобы совместились точки A и B, мы получим центр O круга.

Если же круг нарисован на непрозрачной бумаге, то перегнем лист по какой-нибудь хорде и по серединному перпендикуляру AB к ней, а затем найдем середину O этого перпендикуляра. Точка O будет центром круга, так как AB – его диаметр.

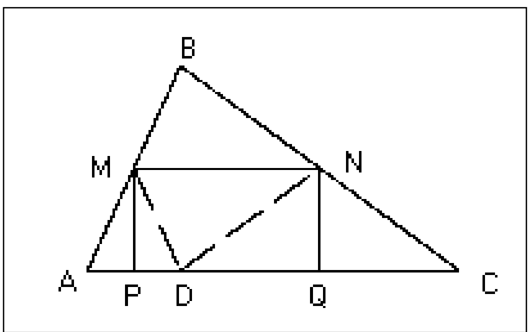
Задача 5. Построения в треугольнике.

Из бумаги вырезан треугольник. Укажите как с помощью перегибаний найти следующие линии и точки этого треугольника: биссектрису данного угла; высоту, опущенную из данной вершины (если углы при двух других вершинах острые); медиану, проведенную к данной стороне.

Для построения биссектрисы угла A треугольника ABC перегнем лист бумаги так, чтобы сторона AB пошла по стороне AC. Тогда линия сгиба будет осью симметрии угла BAC, то есть его биссектрисой.

Задача 6. Сумма углов треугольника.

С помощью перегибаний произвольного бумажного треугольника продемонстрируйте тот факт, что сумма углов при его вершинах равна 180^0.

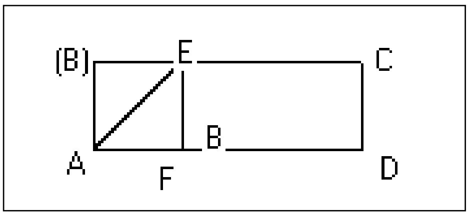


Идея доказательства ясна из рисунка. AC – большая сторона треугольника, MN – средняя линия, $MP \perp AC, NQ \perp AC$. Перегнем треугольник по

$MN, MP, NQ.$ В новом положении 3 угла у вершины D образуют развернутый угол.

Задача 7. Из прямоугольника квадрат.

Из бумаги вырезан прямоугольник. Получите из него квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника.

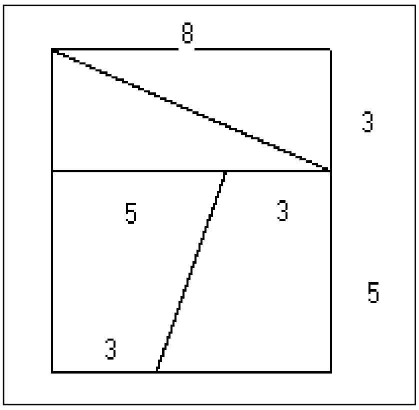


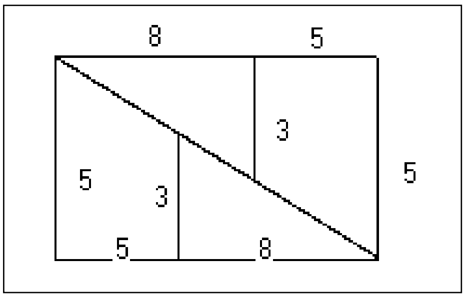
Перегнем прямоугольный лист бумаги по биссектрисе одного из его углов BAD, то есть так чтобы сторона AB прямоугольника ABCD пошла по соседней с ней стороне AD, а линия сгиба пересекла какую-то третью сторону в точке E (см. рисунок). Пусть меньшая сторона AB оказалась наложенной сверху на большую сторону AD. Тогда, перегнув нижнюю часть листа вдоль линии BE, мы получим квадрат ABEF. Действительно, в четырехугольнике ABEF выполнены равенства $\angle ABE = \angle BAF = 90^0$, $AB = BE$ (ибо $\angle BAE = 45^0 = \angle AEB$), $AB = AF, BE = EF$, следовательно, все стороны этого четырехугольника равны, а углы прямые.

Задача 8. Парадокс с разрезанием ковра.

Один фокусник (имя его за давностью забылось) нашел способ, как разрезать квадратный ковер на четыре части, а затем сложить из этих частей прямоугольный ковер большей площади.

Способ этот такой: разобьем каждую сторону квадрата на 8 равных частей, проведем прямые линии, как указано на рисунке и разрежем по ним квадрат на 4 части. Затем сложим эти части так, как показано на следующем рисунке, получим прямоугольный ковер. Площадь прямоугольного ковра больше площади квадратного ковра, так как $13 \cdot 5 = 65$, а $8 \cdot 8 = 64$. В чем же дело? Почему увеличилась площадь?



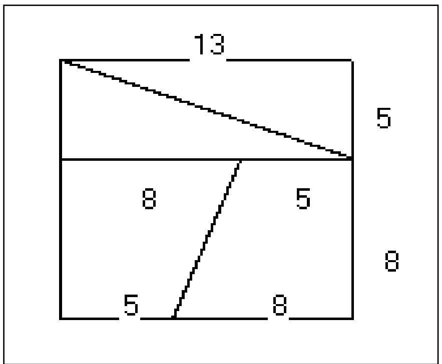


Вы сможете ответить на этот вопрос самостоятельно, если нарисуете большой квадрат (чем больше, тем лучше), разрежете его по «выкройке» и сложите по следующей «выкройке».

Подобные парадоксы с разрезанием квадрата или прямоугольника и связанные с этим математические задачи рассмотрены в книгах Мартина Гарднера «А ну-ка догадайся» и «Математические головоломки».

Проект по использованию решения задачи - парадокса о разрезании ковра (для наиболее подготовленных учащихся).

1. Выполнив указание к решению парадокса о разрезании ковра, вы обнаружите, что в ковре, составленном по выкройке второго рисунка, есть «дыра». Можно ли утверждать, что «дыра» имеет форму параллелограмма?



2. Можете ли вы предложить аналогичную выкройку для ковра $13 \cdot 13$(м^2), так, чтобы площади исходного ковра и вновь сложенного отличались на 1 м^2?

Ответ: Вот выкройка для ковра 13м×13м. Размеры нового ковра будут 21м×8м, его площадь 168 м^2, а площадь исходного 169 м^2.

Пример «десятиминутки»

Математические софизмы.

1. $2 \cdot 2 = 5!$

Пусть имеем два числа $a = 4, b = 5$. Обозначим их полусумму через d; $d = \dfrac{a+b}{2}$; $a + b = 2d$, так что $a = 2d - b, 2d - a = b.$

Умножим последние два равенства почленно; тогда $2d \cdot a - a^2 = 2d \cdot b - b^2$.

Умножим обе части равенства на -1. Получим: $a^2 - 2da = b^2 - 2db$.

Прибавим к обеим частям по d^2, тогда получим: $a^2 - 2da + d^2 = b^2 - 2db + d^2$, то есть $(a-d)^2 = (b-d)^2$.

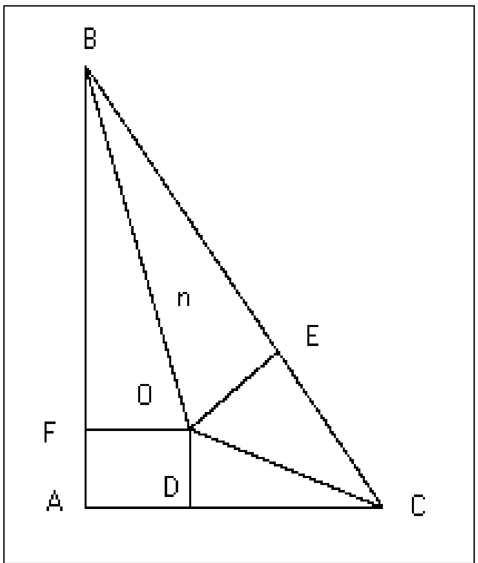
Следовательно, $a - d = b - d$, отсюда $a = b$; но $a = 4, b = 5$, значит, $4 = 5$, то есть $2 \cdot 2 = 5$, что и требовалось доказать.

2. Спичка вдвое длиннее телеграфного столба! «Каждый скажет, что телеграфный столб, конечно, длиннее спички. А я берусь доказать, что каждая спичка длиннее телеграфного столба и притом ровно вдвое!

Действительно, пусть a - длина спички (в дециметрах), b - длина столба (в дециметрах). Обозначим $b - a$ через c, так что $b - a = c, b = a + c$. Перемножим эти равенства почленно. Получим: $b^2 - ab = ca + c^2$. Вычтем из обеих частей $bc.$ Получим $b^2 - ab - bc = ca + c^2 - bc$, $b(b - a - c) = c(a + c - b)$, $b(b - a - c) = -c(b - a - c)$.

Отсюда $b = -c,$ но $c = b - a$, так что $-c = a - b.$ Таким образом, $b = a - b, a = 2b$.

Но что такое a? Длина спички. А b? Длина столба. Итак: спичка вдвое длиннее телеграфного столба, что и требовалось доказать!»



3. Катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе!

Пусть BO - биссектриса угла B, D - середина катета AC, $DO \perp AC, OE \perp BC, OF \perp BA$. Так как O на биссектрисе угла B, то $OF = OE$. $\Delta BFO = \Delta BEO$ (по гипотенузе и катету). Поэтому $BF = BE$ (1).

Далее, $OA = OC$, ибо каждая точка перпенди- куляра к отрезку AC, проходящего через се

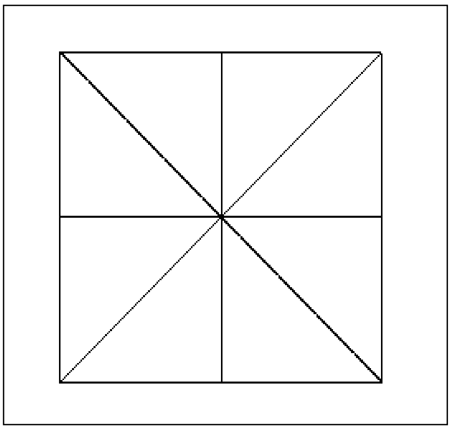
редину AC, равноудалена от A и C. Так как $OF = OE$, то, $\Delta AOF = \Delta COE$ и поэтому $AF = CE$ (2). Складывая почленно (1) и (2), получим $AB = CB$, то есть катет равен гипотенузе, что и требовалось доказать.

Объяснение. Обычно кто-либо из учащихся догадывается, что точка O не может быть внутри ΔABC. Тогда нужно показать, что если O вне ΔABC или на его стороне, то опять $AB = CB$. Именно, показываем, что $BF = BE$, $AF = CE$. Отсюда $AB = CB$.

Оба случая невозможны, что и доказывается полученным противоречием (на самом деле F вне отрезка BA, а E на отрезке BC).

Аналогично «доказывается» софизм: «Все треугольники равнобедренные».

Устные упражнения.



1.Сколько вы видите на рисунке квадратов, треугольников, трапеций?

2. Андрей живет на пятом этаже, а Костя живет в том же доме вдвое выше, чем Андрей. На каком этаже живет Костя?

3. Вычислите: $26\frac{2}{3}\%$ от 30.

4. Вычислите: $\frac{1}{a-3} + 2 + \frac{1}{3-a} - \frac{2a-2}{a}$, если $a = 0{,}01$.

5. Что больше: $\frac{99}{100}$ или $\frac{100}{101}$; $\frac{18}{115}$ или $\frac{90}{573}$?

6. Первую половину пути мотоциклист проехал со скоростью 30 км в час, вторую – со скоростью 60 км в час. Какова его средняя скорость?

7. Могут ли стороны пятиугольника быть равными 1 м, 2 м, 4 м, 8 м, 16 м?

Математический фокус.

Задумай однозначное число, удвой его, прибавь 1, умножь на 5, вычти 2, прибавь 301, зачеркни среднюю цифру, к остатку прибавь 3. Ты получил 37.

Объяснение.

Последовательно выполненные операции можно записать формулой.

x - задуманное число.

$$(2x+1)\cdot 5 - 2 + 301 = 3\cdot 100 + 10x + 4 = \overline{3x4}.$$

Первая цифра 3, вторая x, третья 4. Если зачеркнуть среднюю, то получим 34. 34+3=37. В данном примере после того, как зачеркивается неизвестная цифра x, отгадчик уже знает, что его товарищ, задумавший число, написал 34. После этого он может с полученным числом производить любые операции. Например, прибавить 3, отнять 17, умножить на 2 и т.д. Результат все равно ему будет известен.

Придумать самим учащимся такие фокусы не составит труда. Например,

1. x - любое число.

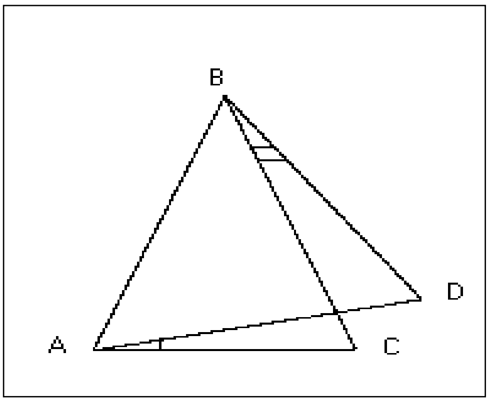
$((x+273+8-31+350-x+200)\div 4)\cdot 3=600$

2. $((x+11)\cdot 2-20)\cdot 5-10x=10$

3. $\dfrac{x+x+12}{2}-x+3=9$

Дополнительные задачи

1. Треугольник ABC -равнобедренный, $AB=BC$; треугольник ABD также равнобедренный, $AB=AD$, $\angle DAC=10^0$, $\angle DBC=20^0$. Найдите длину BD, если $AB=a$.



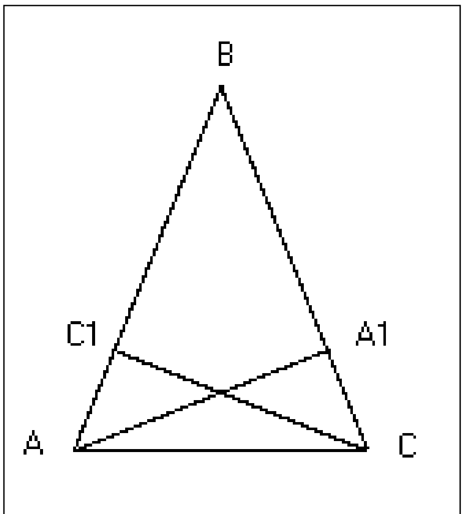
Решение.

1) Обозначим $\angle D=\alpha$; ΔABD - равнобедренный, $AB=AD$, значит $\angle D=\angle ABD$ и $\angle ABC=\alpha-20^0$.
2) Сумма углов треугольника равна 180^0, поэтому $\angle BAD=180^0-2\alpha$.
3) Треугольник ABC равнобедренный, $AB=BC$, значит $\angle BAC=\angle BCA$, но $\angle BAC=\angle BAD+10^0=190^0-2\alpha$. Сумма углов этого треугольника равна 180^0, поэтому $2(190^0-\alpha)+\alpha-20^0=180^0$, откуда $\alpha=60^0$.
4) В равнобедренном треугольнике ABD, в котором $\angle B=\angle D$, угол D равен 60^0. Отсюда следует, что этот треугольник правильный, все его стороны равны. Итак, $BD=AB=a$.

2. Высоты AA_1 и CC_1 треугольника ABC равны между собой. Доказать, что треугольник равнобедренный, $AB=BC$. Найти периметр этого треугольника, если $AC=5$ и $AA_1=4$.

Решение.

1) Прямоугольные треугольники C_1AC и A_1CA равны, у них общая гипотенуза AC и равные катеты $CC_1=AA_1$. Из равенства этих треугольников следует равенство углов C_1AC и A_1CA. Это означает, что в треугольнике ABC углы, прилежащие к стороне AC равны между собой. Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный, $AB=BC$.

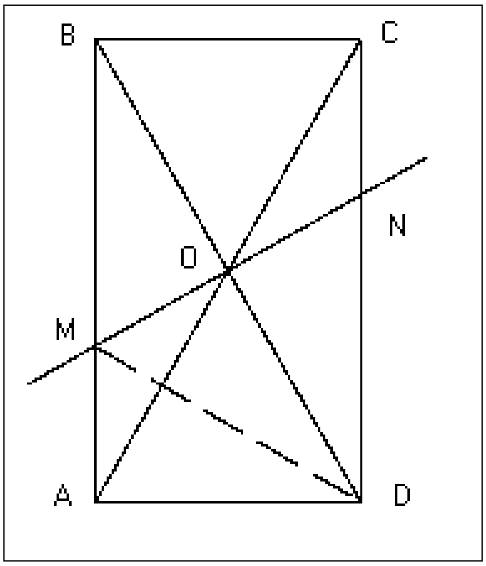


2) Если $AC=5, AA_1=4$, то $A_1C=\sqrt{AC^2-AA_1^2}=3$.

3) Пусть $AB = x$, тогда $BC = x$, $BA_1 = x - 3$. Из прямоугольного треугольника ABA_1 имеем $AB^2 = BA_1^{\ 2} + AA_1^{\ 2}$, то есть $x^2 = (x-3)^2 + 4^2$. Находим $x = \frac{25}{6}$.

4) Вычисляем периметр треугольника ABC: $P = 2AB + AC = 2x + AC = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

3. Через середину диагонали BD прямоугольника $ABCD$ проведена перпендикулярная ей прямая, она пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD в точке N. Известно, что $AB = a$ и $BM = 2AM$. Найти длину отрезка MN и периметр прямоугольника $ABCD$.



Решение.

1) $\Delta AMO = \Delta CNO$, так как $\angle AOM = \angle CNO$ (как вертикальные) $\angle OAM = \angle OCN$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AB и DC) и $AO = OC$ (диагонали прямоугольника, пересекаясь, делятся пополам). Из равенства этих треугольников следует $MO = ON, MO = \frac{1}{2}MN$.

2) Из $BO = OD$ следует, что $\Delta BOM = \Delta DOM$ (катет OM - общий и равны катеты BO и OD), тогда $BM = MD$.

3) $AB = a, AM = \frac{a}{3}, BM = \frac{2}{3}a$. Как установили, $MD = BM$, то есть $DM = \frac{2}{3}a$. Из прямоугольного треугольника AMD находим $AD = \sqrt{MD^2 - AM^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

4) Из прямоугольного треугольника ABD находим $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

5) $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{\sqrt{3}}$, из прямоугольного треугольника BOM находим $MO = \sqrt{BM^2 - BO^2} = \frac{a}{3}$, поэтому $MN = 2MO = \frac{2}{3}a$.

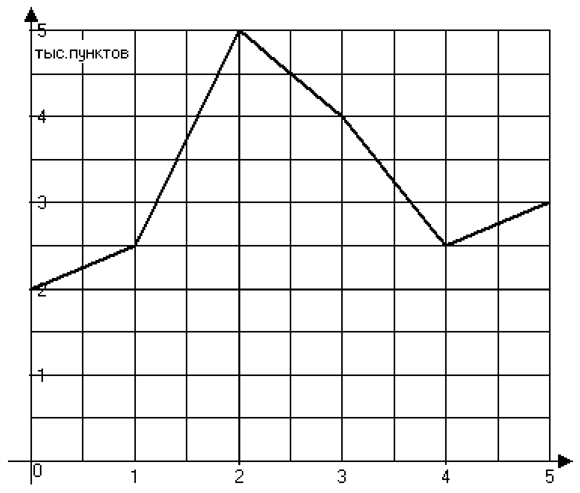
6) Вычисляем периметр прямоугольника $ABCD$ $P = 2(AB + AD) = 2\left(a + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

<u>Построение, чтение и применение графиков</u>

График – «говорящая линия», которая может многое рассказать.

Подготовительное задание.

1. На графике показано, как в течение недели колебался курс акций компании А на торгах. По горизонтальной оси отмечены дни, а по вертикальной – курс акций в тысячах пунктов в течение дня.



1-Понедельник, 2-Вторник,3-Среда,4-Четверг,5-Пятница

Таблица: 6 элементов(а)

1) Каким был курс акций к открытию торгов в пятницу?

2) В какие дни курс акций падал?

А) Понедельник, вторник, пятница   Б) Вторник, среда   В) Среда, четверг, пятница   Г) Среда, четверг

3) В какой день торги закончились самым большим курсом акций?

А) В понедельник   Б) Во вторник   В) В среду   Г) В четверг

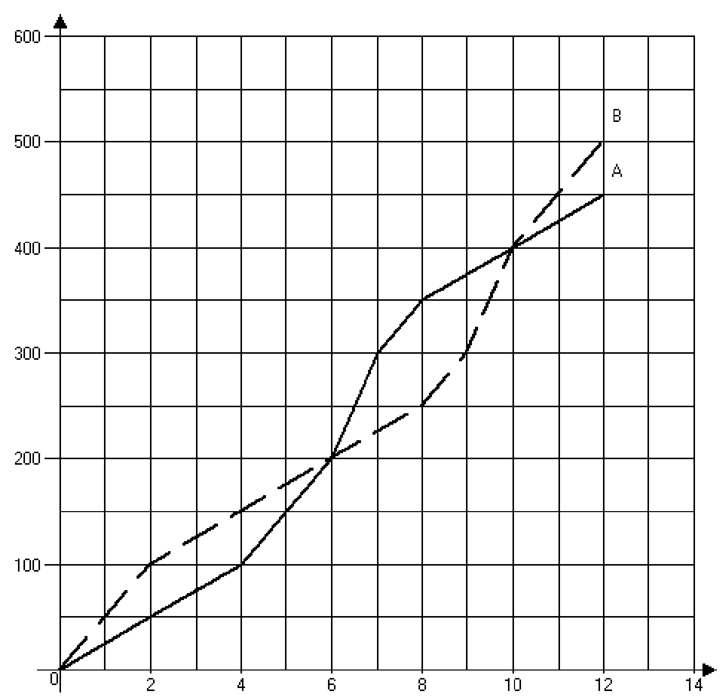
4) За какой день курс акций изменился больше всего?

А) За вторник   Б) За среду   В) За четверг   Г) За пятницу

5) На сколько пунктов вырос курс акций за первые три дня недели?

Задача 1

Фирма начала продавать две новые модели телефонов – А и В. На графиках показано, как росло в течение года количество проданных телефонов (По горизонтальной оси откладывается время, прошедшее с начала продаж, в месяцах; по вертикальной – число телефонов, проданных с начала продаж, в тыс. шт.). Сколько всего телефонов этих двух моделей было продано за первые десять месяцев?



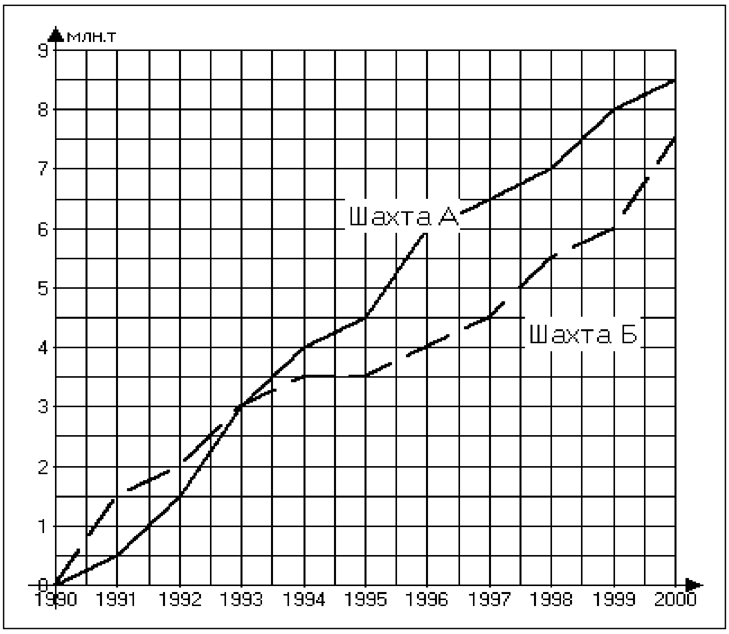
Предостережение. По такому графику можно задать много вопросов – отвечайте на поставленный вопрос.

Совет. Если нужно, то проведите вертикальные прямые через указанные точки горизонтальной оси. Обязательно получатся точки пересечения, расположенные в вершинах квадратиков. Не забывайте о единице измерения по вертикальной оси. Прочитав графики, внимательно прочитайте вопрос задания и дайте ответ на поставленный вопрос.

Решение.

Телефонов модели А за первые 10 месяцев продано 400 тыс. штук. Телефонов модели В за первые 10 месяцев продано 400 тыс. штук. Тогда за 10 месяцев телефонов моделей А и В продано 800 тыс. штук.

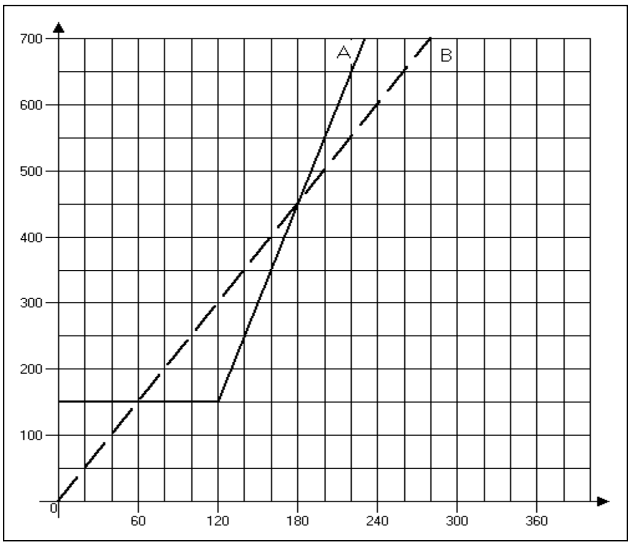
Задача 2.



На графике показано, сколько угля добыли шахты А и Б с 1990 по 2000 года. По горизонтальной оси отмечены годы, а по вертикальной – количество угля, добытое шахтой с 1990 года, в миллионах тонн.

1) Сколько миллионов тонн угля было добыто на шахте Б за 1997 год?
2) Сколько тысяч тонн угля было добыто на шахте А за 1995 и 1996 годы?
3) Сколько миллионов тонн угля было добыто на двух шахтах вместе, начиная с 1991 по 1992 годы?
4) За сколько лет после 1990 года шахта Б добыла 6 миллионов тонн угля?
5) В каком году шахта Б добыла меньше всего угля за год?

Задача 3.



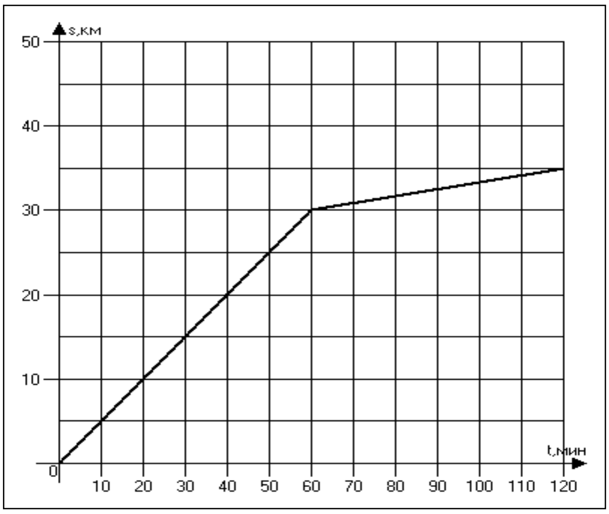
Компания предлагает на выбор два разных тарифа для оплаты телефонных разговоров: тариф А и тариф В. Для каждого тарифа зависимость стоимости разговора от его продолжительности изображена графически. На сколько минут хватит 250 рублей, если используется тариф А? Сколько придется заплатить за 140 минут разговора, если используется тариф В? Сколько придется заплатить за 40 минут разговора, если используется тариф А? На сколько минут хватит 300 рублей, если используется тариф В?

Ось абсцисс – продолжительность, мин.

Ось ординат – стоимость разговоров, руб.

Задача 4.

График описывает движение парусной яхты, которая первую часть пути прошла под парусом. Спустив парус, она продолжила движение.



1) Найдите скорость яхты «под парусом» и «без паруса» (выразив ее в км/ч).
2) На каком расстоянии от начала движения находилась яхта через 50 минут, через 2 часа?
3) Сколько времени потребуется яхте на обратный путь, если она будет двигаться с той же скоростью, что и на первом участке «под парусом»?

Решение.

1) Под парусом яхта прошла 30 км за 60 мин, т.е. за 1 час, значит ее скорость была 30 км/ч.

Без паруса яхта прошла 5 км за 60 минут, значит ее скорость была 5 км/ч.

Ответ: скорость яхты «под парусом» 30 км/ч, скорость яхты «без паруса» 5 км/ч.

2) На графике найдем точку с абсциссой, равной 50. Найдем ординату этой точки. Она равна 25. Получили, что за 50 минут яхта пройдет 25 км. Аналогично, за 120 минут – 35 км.

Ответ: за 50 минут яхта пройдет 25 км, за 120 минут -35 км.

3) Обратный путь составляет 35 км. Скорость яхты 30 км/ч. Найдем время обратного пути:

$t = \frac{S}{V} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$ ч, что составляет 1 час 10 минут.

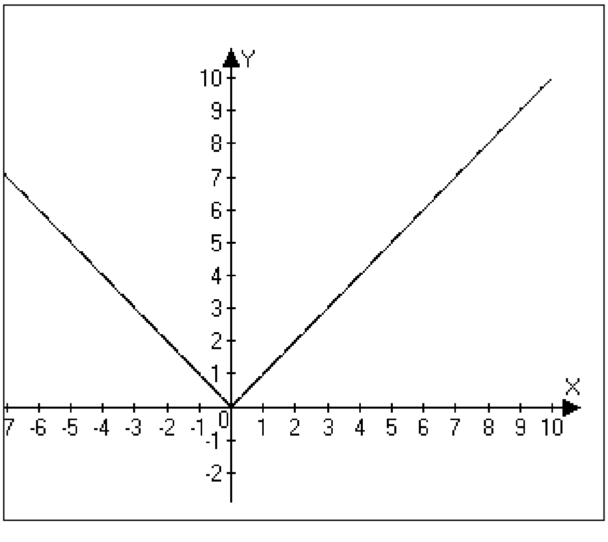
Ответ: 1 ч 10 мин

Задача 5.

Построить графики функций:

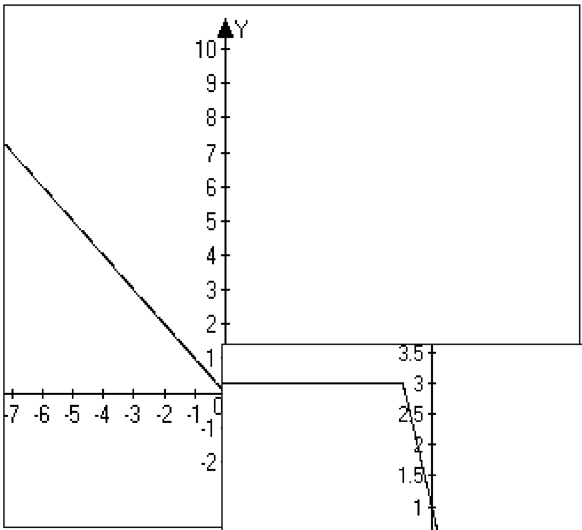
А) $y = \sqrt{x^2}$; Б) $y = \left(-\sqrt{-x}\right)^2$; В) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$; Г) $y = \sqrt{|x-1|}$.

Решение.



А) Из определения квадратного корня следует, что $\sqrt{x^2} = |x|$.

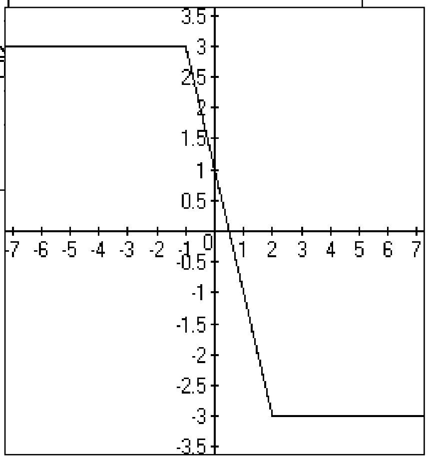
Б) Функция определена при $x \le 0$, $y = -x$.



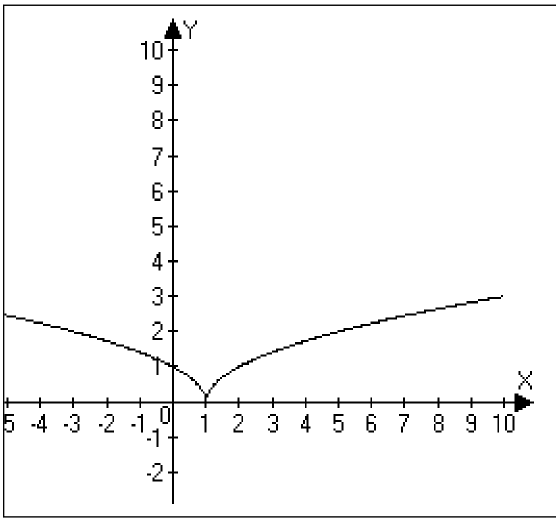
В) $y = \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x+1)^2} = |x-2| - |x+1|$. При $x \le -1$ функция $y = -x + 2 + x + 1 = 3$.

При $x \in (-1;2)$ функция $y = 2 - x - x - 1 = 1 - 2x$.

При $x \ge 2$ функция $y = x - 2 - x - 1 = -3$.



Г) Функция определена для всех x. При x = 1 значение функции равно 0.



Дополнительные задачи.

1. Построить графики функций:

А) $y = -\sqrt{|x|}$; Б) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$; В) $y = \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 1}}{|x|}$.

2. Решите уравнения:

А) $(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 1) = 63$, Б) $\dfrac{x^2 - 3bx + x + 2b^2 - 2b}{x^2 - 7x + 6} = 0$,

В) $\left|x - \sqrt{x} - 2\right| + \left|\sqrt{x} + 6 - x\right| = 8$

3. Бассейн наполняется тремя насосами за 3 часа, причем первый насос производительнее второго вдвое. Если бассейн наполнять двумя насосами: сначала на ½ объема первым и третьим насосами, а затем на ½ объема вторым и третьим, то он наполнится за 5 часов. За какое время бассейн наполнится, если будет работать только третий насос?

4. Исследуйте, сколько решений имеет уравнение $\left|\left||x-1|-1\right|-1\right| = a$ при различных значениях параметра a.

5. Задача Пуассона. Известному французскому математику Пуассону в юности предложили задачу. Заинтересовавшись ею, Пуассон затем увлекся математикой и посвятил этой науке всю свою жизнь. Вот эта задача.

Некто имеет 12 пинт вина (пинта – мера объема) и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда: один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается: каким образом налить 6 пинт вина в сосуд в 8 пинт?

Пример проекта «Кусочно-линейная функция»

1. Постройте последовательно графики следующих функций:

А) $y = |x+1|$

Б) $y = |x+1| + |x|$

В) $y = |x+1| + |x| + |x-2|$

Г) $y = |x+1| + |x| + |x-2| + |x-3|$

2. Графики построенных функций являются ломаными. Их крайние (бесконечные) звенья симметричны относительно некоторой оси. Найдите эту ось для каждого из графиков.

3. Чем отличаются друг от друга ломаные – графики функций, имеющие четное и нечетное число звеньев?

4. В каких точках функции принимают наименьшее значение? Вычислите эти значения.

5. Рассмотрим аналогичную функцию с нечетным числом угловых точек графика (вершин ломаной): $y = |x-a_1| + |x-a_2| + |x-a_3| + |x-a_4| + |x-a_5|, (a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5)$.

А) В какой точке функция принимает наименьшее значение?

Б) Чему равно наименьшее значение функции?

В) Относительно какой оси симметричны крайние звенья графика?

6. Рассмотрим функцию с четным числом угловых точек графика: $y = |x-a_1| + \ldots + |x-a_6|, (a_1 < a_2 < \ldots < a_6)$.

А) На каком промежутке функция постоянна?

Б) Чему равно наименьшее значение функции?

В) Относительно какой оси симметричны крайние звенья графика?

7. Предложите обобщение предложенных задач.

Пример проекта «Парабола»

Дана парабола $y = x^2$ и две лежащие на ней точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$.

1. Докажите, что угловой коэффициент прямой A_1A_2 равен $x_1 + x_2$.

2. Пусть прямая, параллельная прямой A_1A_2, пересекает параболу в точках B_1 и B_2. Докажите, что сумма абсцисс точек A_1 и A_2 равна сумме абсцисс точек B_1 и B_2.

3. Пусть C – точка пересечения прямой A_1A_2 с осью ординат. Вычислите ординату точки C.

4. Пусть прямая, проходящая через точку С, пересекает параболу в точках C_1 и C_2. Докажите, что произведение абсцисс точек A_1 и A_2 равно произведению абсцисс точек C_1 и C_2.

5. Пусть $A(x_0;y_0)$- точка параболы с абсциссой $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$. Докажите, что уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой A_1A_2, может быть записано в виде $y+y_0=2xx_0$.

6. Докажите, что прямая, построенная в предыдущем задании имеет единственную точку пересечения с параболой (эта прямая является касательной к параболе в точке A).

Устные упражнения

1. Между цифрами 1 2 3 4 5 6, не меняя их порядка, расставьте знаки + и – так, чтобы получилась единица. Ответ: 1+2+3-4+5-6=1.

2. Сколько будет полторы трети от ста? Ответ: 50 (полторы трети $1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$).

3. Указать все дроби со знаменателем 15, которые больше $\frac{5}{11}$, но меньше $\frac{6}{11}$. Ответ: $\frac{5}{11}=\frac{75}{165}$; $\frac{6}{11}=\frac{90}{165}$. Чтобы получить дроби со знаменателем 15, выберем в этом промежутке дроби, допускающие сокращение на 11; таких дробей будет две: $\frac{77}{165}$ и $\frac{88}{165}$. Итак, искомые дроби - $\frac{7}{15}$ и $\frac{8}{15}$.

4. Как изменится частное, если из делителя вычесть $\frac{1}{3}$ его? Ответ: новый делитель составляет $\frac{2}{3}$ прежнего, т.е. равен прежнему, умноженному на $\frac{2}{3}$. Значит новое частное равно прежнему, деленному на $\frac{2}{3}$, т.е. увеличится в полтора раза.

5. Задача Эйлера. Решив все свои сбережения поделить поровну между всеми своими сыновьями, некто составил такое завещание. «Старший из моих сыновей должен получить 1000 рублей и $\frac{1}{8}$ часть остатка; следующий – 2000 рублей и $\frac{1}{8}$ нового остатка; третий сын – 3000 рублей и $\frac{1}{8}$ часть третьего остатка и т.д.» Определить число сыновей и размер завещанного сбережения. Ответ: так как все сыновья получили поровну, то $\frac{1}{8}$ часть каждого нового остатка была на 1000 рублей меньше $\frac{1}{8}$ части предыдущего остатка, а, значит, весь новый остаток был на 8000 рублей меньше предыдущего. Так как, по условию, все деньги были поделены полностью, то, когда младший сын получил по завещанию, кроме нескольких тысяч рублей еще $\frac{1}{8}$ часть остатка, этого остатка не оказалось. Но тогда предыдущий остаток 8000 рублей. Из него предпоследний сын получил $\frac{1}{8}$ часть, равную 1000 рублей, а остальные 7000 рублей получил младший сын, который таким образом, был седьмым сыном: сыновей было 7, а завещанная сумма $7000 \cdot 7 = 49000$рублей.

Примерные тексты олимпиад

Вариант 1

1. Упростите выражение: $\left(\frac{6}{y^2-9}+\frac{1}{3-y}\right)\frac{y^2+6y+9}{5}$. (3б.)
2. Зная, что $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$, найдите значение выражения: $\frac{n-2m}{m}$. (4б.)
3. Пассажир едет в поезде, который идет со скоростью 60 км/ч, и видит, что мимо окна проходит встречный поезд в течение 4 с. Какова скорость встречного поезда, если его длина равна 120 м? (5 б.)
4. Постройте график функции $y=|x-3|$ (5 б.)
5. Восстановите математическую запись примера: $АННА + ВАЛЯ = 4809$, здесь разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы- одинаковые цифры. (6 б.)
6. Докажите, что биссектрисы внешних углов прямоугольника, пересекаясь, образуют квадрат. (8 б.)

Вариант 2

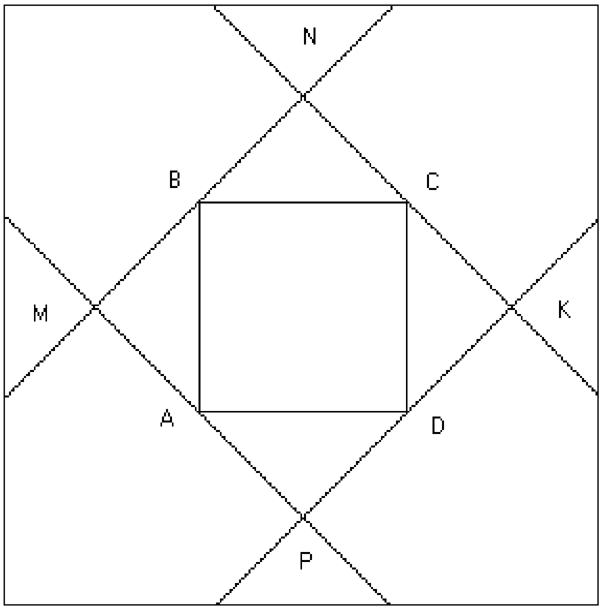
1. Поставьте знаки модуля так, чтобы равенство 1-2-4-8-16=19 стало верным.
2. Постройте график уравнения $(x-1)^2 \cdot y = 0$.
3. Одну овцу лев съедает за 2 дня, волк – за 3 дня, а собака – за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?
4. Постройте треугольник по данной высоте, углу при основании и медиане, проведенной из этого угла.
5. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.
6. Можно ли разрезать разносторонний треугольник на два равных треугольника?

Ответы:

Вариант 1

1. $-\frac{y+3}{5}$.   2. 1.   3. 48 км/ч   5. 1661+3148=4809

6. Рассмотрим ΔCKD (см. рисунок). Так как CK и DK - биссектрисы внешних углов прямоугольника $ABCD$, то $\angle KDC = \angle KCD = 45^0$, а $\Delta\, KCD$ - равнобедренный и прямоугольный. Примем длины сторон CK и DK за c. Аналогично $\Delta\, NBC$, $\Delta\, PAD$, ΔMAB являются равнобедренными и прямоугольными, причем $\Delta\, NBC = \Delta\, PAD$, $\Delta\, KCD = \Delta\, MAB$. Обозначив длину NC за d, получим, что все стороны прямоугольника $MNKP$ имеют длину $c+d$, поэтому $MNKP$ является квадратом.



Вариант 2

1. $\left|\,|1-2|-|4-8|-16\right| = 19$

2. Графиком уравнения являются две прямые, заданные уравнениями: $y=0$ и $x=1$.

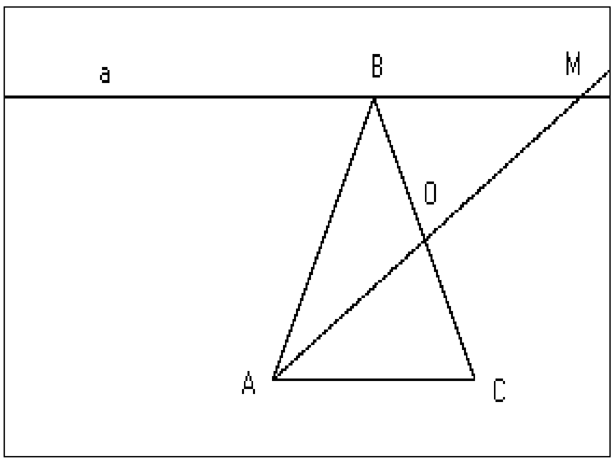
3. Лев съедает за сутки $\frac{1}{2}$ овцы, волк - $\frac{1}{3}$ овцы, собака - $\frac{1}{6}$ овцы. Тогда вместе за сутки они съедят $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$(овцу). Ответ: за один день.

4. План построения.

1) Строим угол A.

2) Строим множество точек, находящихся на расстоянии, равном данной высоте от основания треугольника (прямую a).

3) Находим точку пересечения данного множества и второй стороны угла - B. Это будет вторая вершина треугольника.

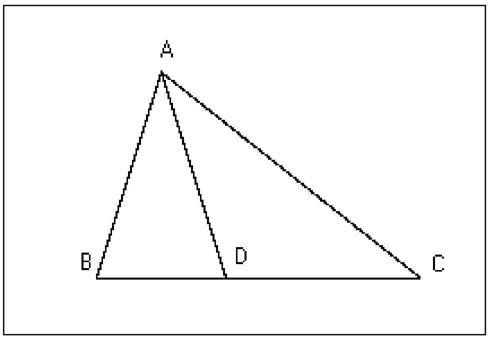


4) Строим окружность с центром в вершине угла и

радиусом в 2 раза большим данной медианы. Данная окружность пересечет построенную прямую a в некоторой точке M, принадлежащей внутренней области угла BAC.

5) Соединяем данную точку M с вершиной угла A и делим полученный отрезок AM пополам. Полученную точку O соединяем со второй вершиной треугольника B, продолжаем прямую до пересечения с основанием треугольника и получаем третью вершину треугольника С.

5. Пусть такого класса в школе нет, т.е. во всех классах будет 33 и менее учащихся. Тогда во всей школе будет не более $33 \cdot 30 = 990$ учащихся, что противоречит условию задачи (в школе 1000 учащихся). Значит, наше предположение неверно, поэтому в школе есть класс, в котором не менее 34 учеников.



6. Пусть ΔABC разрезан на два равных треугольника (см. рисунок). Тогда $\angle ADB$ в ΔADB должен быть равен одному из углов ΔADC. Но $\angle ADB$ не может равняться $\angle ACD$ или $\angle CAD$, так как внешний угол треугольника всегда больше внутреннего угла треугольника, не смежного с ним.

Если же $\angle ADB = \angle ADC$, то $\angle ADB = \angle ADC = 90^0$, значит, AD является высотой. Но в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит, $AB = AC$, что противоречит тому, что ΔABC разносторонний. Поэтому разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника нельзя.

Примерное содержание математического турнира.

1 тур.

1. Решите уравнение $|x-2009|+|2009-x| = 2010$.

2. На птицеферму привезли корм, которого хватило бы уткам на 30 дней, а гусям – на 45 дней. Рассчитайте, на сколько дней хватит привезенного корма и уткам, и гусям вместе.

3. В классе послушных девочек столько же, сколько непослушных мальчиков. Кого в классе больше: послушных детей или мальчиков? Объясните, как вы рассуждали.

4. В первый месяц бригада перевыполнила задание на 10%, а во второй – на 20%. На сколько процентов бригада перевыполнила план двух месяцев?

Решение.

1. $2 \cdot |x-2009| = 2010$

$|x-2009| = 1005$

$x = 3014$ или $x = 1004$.

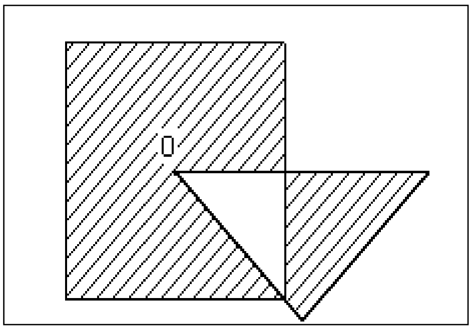
2. За 1 день расходуется уткам $\frac{1}{30}$, гусям - $\frac{1}{45}$ привезенного корма, а всего за один день расходуется $\frac{1}{30}+\frac{1}{45}=\frac{1}{18}$ привезенного корма. Значит, привезенного корма хватит на 18 дней.

3. Обозначим число послушных девочек ПД, число непослушных мальчиков – НМ. По условию задачи ПД=НМ. Число послушных мальчиков обозначим ПМ. Тогда ПД+ПМ=НМ+ПМ. Это означает, что в классе послушных детей (ПД+ПМ) столько же, сколько мальчиков (НМ+ПМ).

4. Пусть месячное задание составляет a деталей. В первый месяц бригада сделала $1{,}1a$ деталей, во второй - $1{,}2a$ деталей, а за два месяца - $2{,}3a$ деталей. Задание двух месяцев ($2a$ деталей) бригада перевыполнила на $0{,}3a$ деталей, или на $\frac{0{,}3a}{2a}\cdot 100\% = 15\%$.

Ответ: на 15%.

2 тур.



1. Треугольник поворачивают вокруг центра квадрата O. Докажите, что разность площадей закрашенных частей при этом не изменяется.

2. Подряд записывают числа натурального ряда, не разделяя их запятыми:1234567891011121314151617181920… . Какая цифра окажется на 2007 месте?

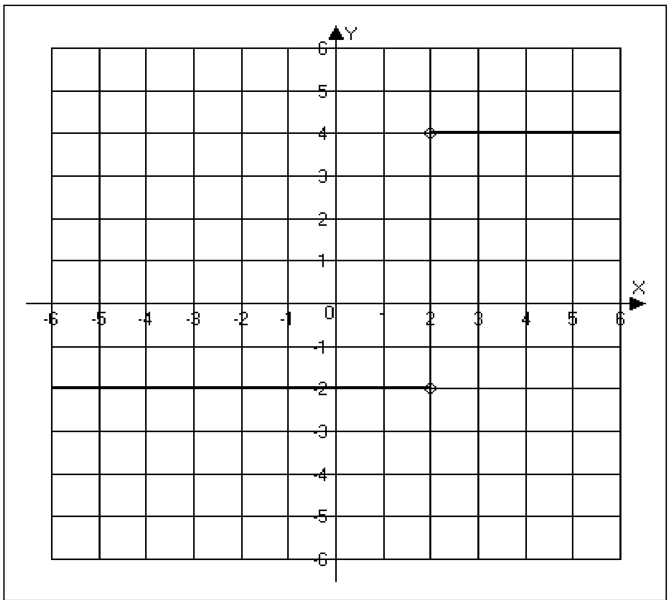
3. Постройте график функции $y=\frac{3|x-2|}{x-2}+1$.

4. Найдите сумму внутренних углов произвольной пятиконечной звезды.

5. Арбуз весил 20 кг и содержал 99% воды. Когда он немного усох, то стал содержать 98% воды. Сколько теперь весит арбуз?

Решение.

1. Пусть закрашенная часть квадрата имеет площадь S_1, закрашенная часть треугольника имеет площадь S_2, а незакрашенная часть квадрата и треугольника имеет площадь S. Тогда разность закрашенных частей равна $S_1 - S_2 = (S_1+S)-(S_2+S)$, то есть равна разности площадей квадрата и треугольника, которая не изменяется при вращении треугольника. Значит, при вращении треугольника разность закрашенных частей не изменяется, что и требовалось доказать.



2. В ряду натуральных чисел 9 однозначных и 90 двузначных чисел, для записи которых использовано $9+2\cdot 90=189$ цифр. Искомая 2007-я цифра стоит на 1818-м месте, если считать от первой

цифры первого трехзначного числа (100). Разделим 1818 на 3, получим 606. Это означает, что искомая цифра является третьей цифрой 606-го трехзначного числа, т.е. числа 606+99=705. Ответ: искомая цифра 5.

3. см. рис.

4. Сумма внутренних углов произвольной пятиконечной звезды равна 180^0.

5. Масса «сухого вещества» арбуза составляет 1% первоначальной массы, или $20 \cdot 0{,}01 = 0{,}2$ (кг). После того как арбуз усох, масса «сухого вещества» составляла 2% новой массы арбуза. Найдем эту новую массу $0{,}2 : 0{,}02 = 10$(кг). После того как арбуз усох, его масса уменьшилась вдвое.

Литература

1. Спивак А.В. *Тысяча и одна задача по математике: Кн. для учащихся* – М.: Просвещение, 2002.
2. Петраков И.С. *Математика для любознательных: Кн. для учащихся 8-11 классов* – М.: Просвещение, 2000.
3. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. *Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы 9 класс*. – М.: АСТ Астрель, 2004.
4. *Алгебра. 9 класс. Подготовка к итоговой аттестации* - 2009: Учебно-методическое пособие под редакцией Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону; «Легион», 2008.
5. Рязановский А.Р., Фролова О.В. *Геометрия. 7-9 кл.: Дидактические материалы*. – М.: Дрофа, 1999.
6. Гольдич В.А., Злотин С.Е. *3000 задач по алгебре для 5-9 классов: Учебное пособие*. СПб.: Издательский Дом «Литера», 2001.
7. Ященко И.В., Семенов А.В., Захаров П.И. *Подготовка к экзамену по математике ГИА 9 (новая форма) 2009 г. Методические рекомендации*. – М.: МЦНМО, 2009.

Литература

1. Данкова И.Н. и др., *Предпрофильная подготовка учащихся 9 классов по математике: Общие положения, структура портфолио, программа курсов, сценарий занятий.* – М.: «5 за знания», 2006.
2. Алгебра и начала анализа: сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы/ под ред. С.А.Шестакова.– 2-е изд., испр.– М.: Внешсигма-М, 2007.
3. Колягин Ю.М. и др., *Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10 кл. общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни.* М.: Просвещение, 2008.
4. Алимов Ш.А. и др., *Алгебра*-9. – М.: Просвещение, 2008.
5. Безрукова Г.К., Мельникова Н.Б., Шевелёва Н.В. *ГИА – 2009. Экзамен в новой форме. Геометрия. 9 класс.* – М.: АСТ Астрель, 2008.
6. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. *Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы 9 класс.* – М.: АСТ Астрель, 2004.
7. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.
8. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.